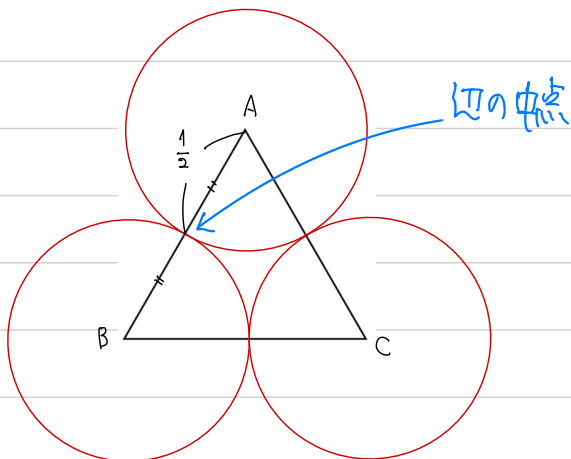


X: 辺AB, BC, CAがすべて D_r に含まれ、かつ r が最小の状態

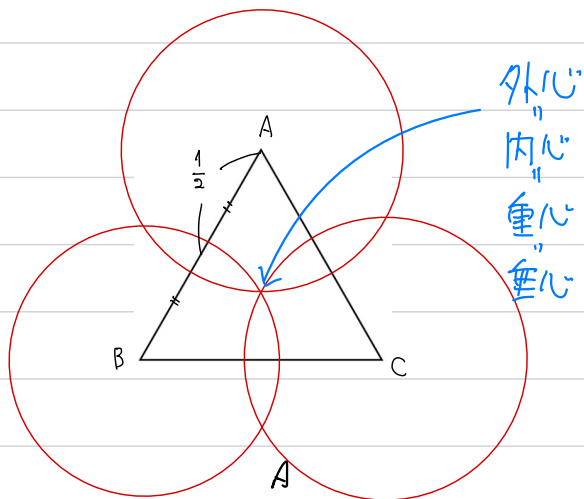
Y: $\triangle ABC$ が D_r に含まれ、かつ r が最小の状態

(1) $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$ のとき, $\triangle ABC$ は正三角形.

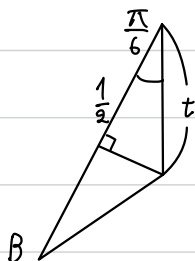
Xの状態の図は以下のよう。よって $s = \frac{1}{2}$.



Yの状態は以下のよう。

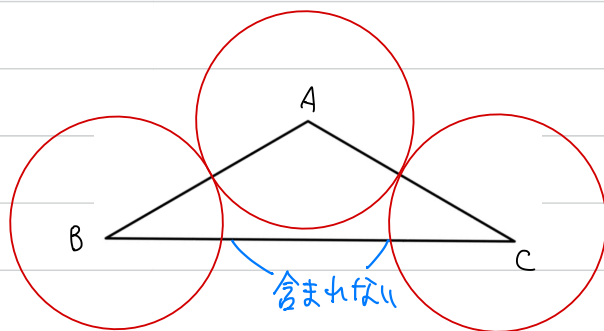


右図より $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\frac{1}{2}}{t}$
 $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$

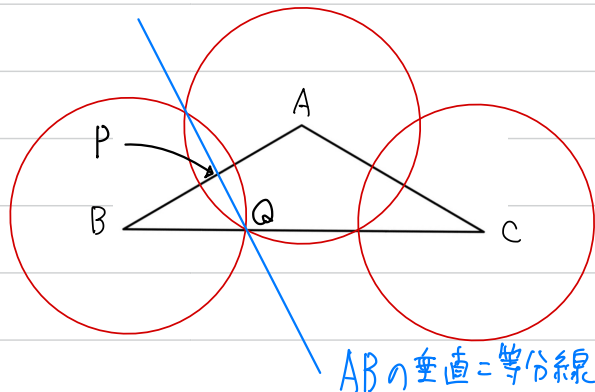


(2) $\angle BAC = \frac{2}{3}\pi$

(1)と同じように, 半径 $\frac{1}{2}$ の円を描いてみる.
 辺BCのまわ中回りも, D_r に含まれない.

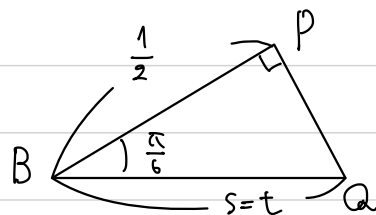


s, t どちらに關しても, 半径が小さすぎても, 半径を大きくすると下図の半径の時, XとYが同時に起こる。つまり $s = t$



ABの垂直=等分線とAB, BCを通る点をP, Qとする。

$BQ = \frac{\frac{1}{2}}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$
 $s = t = \frac{1}{\sqrt{3}}$



2025年

東大数学

文系第2問③

Yとtに関する考察

(1) では、正三角形の“4心”を通る半径のとき、円の中心は、頂点からの2頂点から等距離の場所（つまり垂直二等分線上）が重要そう。というときは“4心”のうち、外心が鍵だろう。

(2) では、Pを通るときでは半径が小さすぎた。もう少し大きくして、Qを通るようにした。

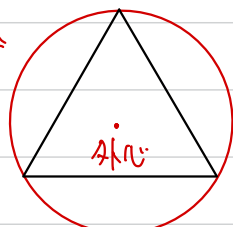
⇒ 外心、辺と垂直二等分線の交点が場合分けの分岐点なのではないか。

復

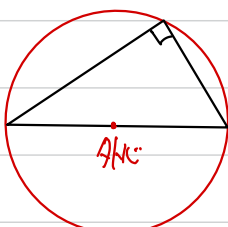
外心は、鋭角のとき、三角形の中

直角 : 辺上

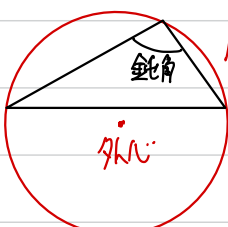
鈍角 : 外



鋭角三角形



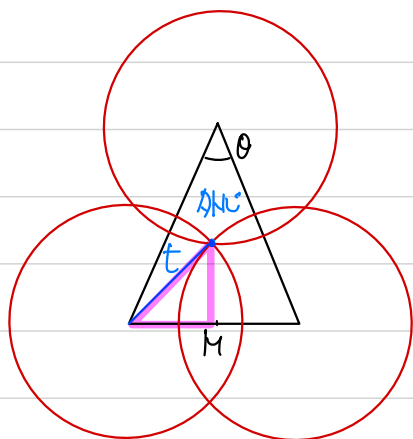
直角三角形



鈍角三角形

⇒ $0 < \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} < \theta$ 場合分け。

(i) $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき

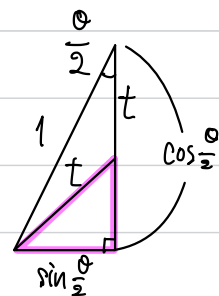
解法1 三平方を使う。

右の△に三平方の定理

$$\left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^2 + \left(\cos \frac{\theta}{2} - t\right)^2 = t^2$$

$$\underbrace{\sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2}}_{=1} - 2t \cos \frac{\theta}{2} + t^2 = t^2$$

$$\therefore t = \frac{1}{2 \cos \frac{\theta}{2}}$$

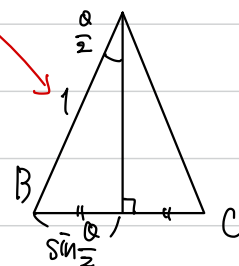
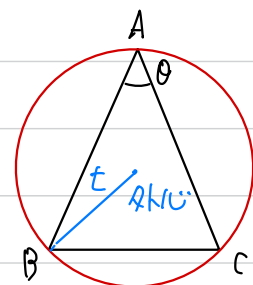
解法2 正弦定理を使う。

tは、△ABCの外接円の半径でもある。

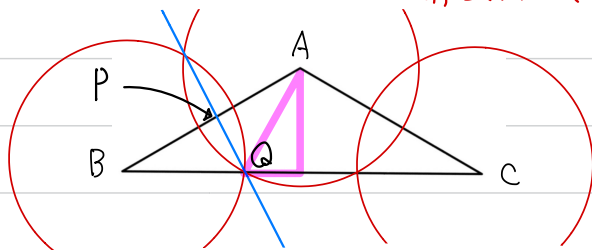
$$BC = 2 \sin \frac{\theta}{2}$$

正弦定理から、 $\frac{BC}{\sin \theta} = 2t$

$$t = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2}}{2 \sin \theta} = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2}}{2 \times 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2 \cos \frac{\theta}{2}}$$



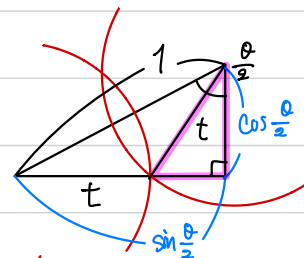
(ii) $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ のとき、 $\nearrow$ Pを求めたときの(iii)と
ま、た同心（前ページ右）



右の△について
三平方の定理から、
 $\left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^2 + \left(\sin \frac{\theta}{2} - t\right)^2 = t^2$

$$\underbrace{\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}}_{=1} - 2t \sin \frac{\theta}{2} + t^2 = t^2$$

$$\therefore t = \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2}}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ のとき } t = \frac{1}{2 \cos \frac{\theta}{2}} \\ \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{ のとき } t = \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \end{array} \right.$$